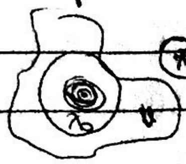
Όρια και συνέχεια συναρτήσεων:

Ορισμός: Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$, $f:U\to\mathbb{R}$, $\bar{x}_0\in\mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του U [υπάρχει ακολουθία $(\bar{x}_\nu)\subset U\setminus\{\bar{x}_0\}$: $\bar{x}_\nu\to\bar{x}_0$] και $l\in\mathbb{R}$. Τότε λέμε



(*) ότι η f συγκλίνει στο l όταν το $\bar{x}$ συγκλίνει στο $\bar{x}_0$, ή η f έχει στο σημείο $\bar{x}_0$ όριο το l, αν $\boxed{\forall(\bar{x}_\nu)\subset U\setminus\{\bar{x}_0\}}$ $\boxed{\text{με } \underbrace{\bar{x}_\nu\to\bar{x}_0}_{\Leftrightarrow\|\bar{x}_\nu-\bar{x}_0\|\to 0} : \underbrace{f(\bar{x}_\nu)}^{\in\mathbb{R}}\to \overbrace{l}^{\in\mathbb{R}}}$

(*) αν $\bar{x}_0\in \text{int}U \Leftrightarrow \exists\,\varepsilon>0 : B(\bar{x}_0,\varepsilon)\subset U \Rightarrow \exists\,\nu_0\in\mathbb{N} : \forall\nu\in\mathbb{N},\ \nu\geq\nu_0$:
$\frac{1}{\nu}\leq\frac{1}{\nu_0}<\varepsilon$.

$\Rightarrow \forall\nu\geq\nu_0 : B(\bar{x}_0,\frac{1}{\nu})\subset U \Rightarrow \forall\nu\geq\nu_0\ \exists\,\bar{x}_\nu\in B(\bar{x}_0,\frac{1}{\nu})\setminus\{\bar{x}_0\}\subset U$
$\Rightarrow \forall\nu\geq\nu_0 : \|\bar{x}_0-\bar{x}_\nu\|<\frac{1}{\nu}\longrightarrow 0 \Rightarrow \underbrace{\bar{x}_\nu}_{\neq\bar{x}_0}\to\bar{x}_0$] δηλ. κάθε εσωτερικό σημείο του U είναι σημ. συσσ.

Παρατήρηση: Αν $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό, τότε $U=\text{int}U$, δηλ. κάθε $\bar{x}\in U$ είναι σημείο συσσώρευσης [$\longrightarrow$ «πράξη»: όταν εξετάζουμε και δουλεύουμε με όρια συναρτήσεων το «φυσικό» πεδίο ορισμού τους είναι ανοικτό σύνολο.

Παραδείγματα: (σας ως ιδέες (όχι για αυστηρή αποδεικτικοποίηση))

① Έστω $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$. Υπάρχει όριο, $l\in\mathbb{R}$, για την f, όταν το (x,y) συγκλίνει στο $(0,0)$;

Όχι (δεν υπάρχει $l\in\mathbb{R}$ τέτοιο). Αφού, π.χ. για $(x_\nu,y_\nu)=(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu})\longrightarrow(0,0)$
αλλά $f(x_\nu,y_\nu)=f(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu})=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{\nu^2}}=\frac{\nu^2}{2}\xrightarrow[\nu\to\infty]{}+\infty\neq l\in\mathbb{R}$
$[(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu})\neq(0,0)\ \forall\nu\in\mathbb{N}]$.

② Έστω $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$.

http://www.tenenghong.com

Scanned with CamScanner

Στρατηγική: Επιλέγω αυθαίρετα μια όσο δυνατόν πιο απλή ακολουθία $\underbrace{(x_\nu, y_\nu)}_{\text{∈ πεδίου ορισμού της } f \text{ πλην το } (0,0)} \to (0,0)$ και εξετάζω αν υπάρχει το $\lim_{\nu\to\infty} f(x_\nu, y_\nu) \in \mathbb{R}$

Αν δεν υπάρχει αυτό (για τη συγκεκριμένη - αυθαίρετα επιλεγμένη - ακολουθία) τότε η f δεν συγκλίνει σε κάποιο $l \in \mathbb{R}$ όταν $(x,y) \to (0,0)$ (βλ. ορισμό) (βλ. παράδειγμα (I)).

Εδώ: Επιλέγω π.χ.: $(x_\nu, y_\nu) = \underbrace{\left(\frac{1}{\nu}, 0\right)}_{\neq (0,0)} \to (0,0)$

Αν υπάρχει το $\lim_{\nu\to\infty} f(x_\nu, y_\nu) \in \mathbb{R}$, τότε αυτό θα είναι το υποψήφιο $l \in \mathbb{R}$ αφού για κάθε ακολουθία ισχύει $f(x_\nu, y_\nu) \to l \in \mathbb{R}$.
Θα πρέπει όμως να εξετάσουμε αν το $l = \lim_{\nu\to\infty} f(x_\nu, y_\nu) \in \mathbb{R}$ [για τη συγκεκριμένη $\underbrace{(x_\nu, y_\nu)}_{\overset{\text{εδώ}}{=}\left(\frac{1}{\nu}, 0\right)} \to (0,0)$]

Είναι όριο $\forall (x_\nu, y_\nu) \neq (0,0)$ με $(x_\nu, y_\nu) \to (0,0)$ της $f(x_\nu, y_\nu)$,
δηλ. αν ——— || ——— : $f(\tilde{x}_\nu, \tilde{y}_\nu) \to l = \lim_{\nu\to\infty} f(\tilde{x}_\nu, \tilde{y}_\nu)$.

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

Μπορούμε να δοκιμάσουμε (αν υποπτευόμαστε ότι ένα όριο $l \in \mathbb{R}$ δεν υπάρχει) με μια άλλη επιλεγμένη ακολουθία $\underbrace{(\hat{x}_\nu, \hat{y}_\nu)}_{\neq (0,0)} \to (0,0)$. Αν $\lim_{\nu\to\infty} f(\hat{x}_\nu, \hat{y}_\nu) \left\{ \begin{array}{l} \nexists \\ = \hat{l} \\ \neq l \end{array} \right.$
δεν υπάρχει (βλ. ορισμό)

[Εδώ: $(\hat{x}_\nu, \hat{y}_\nu) = \left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) \to (0,0)$ και $f(\hat{x}_\nu, \hat{y}_\nu) = f\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) \to \frac{1}{2} \neq 0$

Συνεπώς δεν υπάρχει όριο της f.

http://www.tanenghong.com

Scanned with CamScanner

③ Αν διαπιστώσουμε ότι για την επιλεγμένη $(\tilde{x}_\nu, \tilde{y}_\nu) \to (0,0)$ έχουμε $f(\tilde{x}_\nu, \tilde{y}_\nu) \to l \in \mathbb{R}$ και υποψιαζόμαστε (λόγω εμπειρίας) ότι το $l \in \mathbb{R}$ (αυτό!) είναι όριο για την f όταν $(x,y) \to (0,0)$, τότε θα πρέπει (βλ. ορισμό) ν.δ.ο.: $\forall (x_\nu, y_\nu) \in U \setminus \{x_0, y_0\}$ με $(x_\nu, y_\nu) \to (0,0)$ $f(x_\nu, y_\nu) \to l \in \mathbb{R}$.

[Υπόδειξη / «μυστικό του επαγγέλματος»: συνήθως κριτήριο της παρεμβολής φράγμα] $f(x_\nu, y_\nu) \to l \in \mathbb{R}$

Εδώ: $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$. Δοκιμή: $(\tilde{x}_\nu, \tilde{y}_\nu) = \underbrace{\left(\frac{1}{\nu}, 0\right)}_{\neq (0,0)} \to (0,0)$ $\|(x_\nu, y_\nu)\| \to 0$

$\Rightarrow f(\tilde{x}_\nu, \tilde{y}_\nu) = 0 \to 0 = l$ υποψήφιο όριο.

Έστω τυχαία $(x_\nu, y_\nu) \to (0,0)$. Θ.ν.δ.ο $f(x_\nu, y_\nu) \to 0 \Leftrightarrow 0 \leq |f(x_\nu, y_\nu)| \to 0$

Θέλω να βρω $a_\nu \geq 0$, $a_\nu \to 0$ και $|f(x_\nu, y_\nu)| \leq a_\nu$ (Αν το βρω, τελειώσαμε).

Εδώ: $|f(x_\nu, y_\nu)| \leq \|(x_\nu, y_\nu)\| \cdot \underbrace{\|(x_\nu, y_\nu)\|^2}_{\geq y_\nu^2} \leq \underbrace{\|(x_\nu, y_\nu)\|}_{\to 0} \cdot \|(x_\nu, y_\nu)\|^2$

Πρόταση: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημ. συσσ. του U, $f: U \to \mathbb{R}$ και $l \in \mathbb{R}$.

Τότε: $f(\bar{x}) \to l$ όταν $\bar{x} \to \bar{x}_0$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\}$ $|f(\bar{x}) - l| < \varepsilon$.

αυθαίρετα το f εγγίζει στο l, όταν το $\bar{x}$ εγγίζει στο $\bar{x}_0$ $\Leftrightarrow$ ορισμός

$\Leftrightarrow \forall \bar{x} \in U$ με $0 < \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < \delta$

$\Leftrightarrow \forall (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$: $f(\bar{x}_\nu) \to l$

Απόδειξη: $\Rightarrow$ (με απαγωγή σε άτοπο ή - καλύτερα - Θ.Δ.Ο.: αν δεν ισχύει το δεξί μέρος της ισοδυναμίας δεν θα ισχύει και το αριστερό.

Έστω $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\} : |f(\bar{x}) - l| \geq \varepsilon \Rightarrow$

$\delta = \frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ $\forall \nu \in \mathbb{N}\ \exists \bar{x}_\nu \in U \cap B(\bar{x}_0, \frac{1}{\nu}) \setminus \{\bar{x}_0\}$

$|f(\bar{x}_\nu) - l| \geq \varepsilon$.

$\Rightarrow \underbrace{\bar{x}_\nu}_{\in U \setminus \{\bar{x}_0\}} \to \bar{x}_0$ [αφού $\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \frac{1}{\nu} \to 0$]: $\underbrace{|f(\bar{x}_\nu) - l| \geq \varepsilon}_{\Rightarrow f(\bar{x}_\nu) \not\to l}$

http://www.tanenghong.com

Scanned with CamScanner

Δηλαδή, αν δεν ισχύει το δεξί μέλος, δεν ισχύει το αριστερό.

$\Leftarrow$: Έστω ότι $(\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$. Ο.ν.δ.ο. $f(\bar{x}_\nu) \to l$.

ισοδύναμα $\exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu \geq \nu_0$

$|f(\bar{x}_\nu) - l| < \varepsilon$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Από το δεξί μέλος (από υπόθεση) έχουμε ότι $\exists \delta > 0$

$\forall \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\}$ $|f(\bar{x}) - l| < \varepsilon$.

Άρα, αφού $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ ότι $\forall \tilde{\delta} > 0\ \exists \nu_0\ \forall \nu \geq \nu_0 : \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \tilde{\delta}$, επιλέγοντας ως $\tilde{\delta}$ το (δοσμένο από το δεξί μέλος δ)

υπάρχει το αντίστοιχο $\boxed{\nu_0 = \nu_0(\tilde{\delta}) = \nu_0(\delta) \in \mathbb{N}}$ έτσι ώστε

$\forall \nu \geq \nu_0 : \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \tilde{\delta} = \delta \Rightarrow \bar{x}_\nu \in B(\bar{x}_0, \delta) \underset{(\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}}{\Rightarrow}$ $\bar{x}_\nu \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\} \overset{\text{Ⓡ}}{\Rightarrow}$

$|f(\bar{x}_\nu) - l| < \varepsilon$

Πρόταση (Άσκηση): Το όριο $l \in \mathbb{R}$ μιας συνάρτησης $f : U \to \mathbb{R}$ [$U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσ. του U] όταν το $\bar{x}$ τείνει στο $\bar{x}_0$ (από ορισμό και προηγ. πρόταση) είναι μοναδικό και συμβολίζεται με $\underbrace{\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l}$

$\underset{\text{ορισμός με ακολ.}}{\Leftrightarrow} \forall (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$: $\lim_{\nu \to \infty} f(\bar{x}_\nu) = l$

Άσκηση: Δ.Ο. $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l \Leftrightarrow \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} (f(\bar{x}) - l) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} |f(\bar{x}) - l| = 0 \Leftrightarrow \lim_{\bar{h} \to \bar{0}} f(\bar{x}_0 + \bar{h}) = l$

$\Leftrightarrow \lim_{\bar{h} \to \bar{0}} (f(\bar{x}_0 + \bar{h}) - l) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\bar{h} \to \bar{0}} |f(\bar{x}_0 + \bar{h}) - l| = 0$

Θεώρημα 2.1: $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} (f + g)(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) + \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} g(\bar{x})$

(όταν αυτά τα όρια υπάρχουν στο $\mathbb{R}$)

Αντίστοιχα για af, fg, f/g (όταν $g(\bar{x}_0) \neq 0$).

http://www.tanenghong.com

Scanned with CamScanner

Ορισμός: Η $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, λέγεται συνεχής στο $\bar{x}_0 \in U$, αν

$$\boxed{\forall (\bar{x}_n) \subset U \text{ με } \bar{x}_n \to \bar{x}_0 : f(\bar{x}_n) \to f(\bar{x}_0)}$$

Άσκηση: Δείξτε ότι οι προβολές $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_i$, $\forall i = 1, \dots, n$, οι πολυωνυμικές συναρτήσεις και οι ρητές συναρτ. του $\bar{x}$.
(δηλ. π.χ. $\underset{(x_1, \dots, x_5)}{f(\bar{x})} = x_1^3 \, x_2^{25} x_3 x_4^4 x_5^8 + \dots$ συνεχή (= πεπερασμένο πλήθος)
σε όλο το $\mathbb{R}^n$, δηλ. σε κάθε $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ (βλ. Θεωρ. 8.2.8)